ESCUELA NORMAL SUPERIOR Y

SUPERIOR DE COMERCIO N° 46

“Domingo Guzmán Silva”

Cuadernillo de Matemática

4to año

Ciclo lectivo 2026

Organización del cuadernillo

Acuerdo Pedagógico

Pautas de trabajo y convivencia:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- A partir del 2do año, es necesario contar con calculadoras científicas como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en **formato papel.**
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

Para acreditar la materia:

- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.

……………………………………… ………………………………………………

Firma estudiante Firma padre/madre/tutor

Revisión:

Propiedades de la potenciación y radicación

Teoría

Potenciación

- *Potencias de igual base*

$$a^n . a^m = a^{n+m} \wedge \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- *Distributividad*

$$(a . b)^n = a^n . b^n \wedge \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- *Potencia de otra potencia*

$$\left(a^n\right)^m = a^{n . m}$$

- *Exponente negativo*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \wedge \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Radicación

- *Exponente fraccionario*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- *Distributividad*

$$\sqrt[n]{a . b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} \wedge \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- *Raíz de otra raíz*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n . m]{a}$$

- *Simplificación de índices*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n . b]{a^{m . b}}$$

Ejercitación

17 Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a) $m . m = 2m$ ☐

b) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{3}{4}}$ ☐

c) $s . s . s = s^3$ ☐

d) $\sqrt{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[5]{b}$ ☐

e) $\left(t . t^5\right)^2 = t^{12}$ ☐

f) $\frac{a}{b}^{-1} = \frac{b}{a}$ ☐

g) $\sqrt[6]{y^3} = y^{\frac{1}{2}}$ ☐

h) $3x^2 = 9x^2$ ☐

i) $\sqrt[3]{r} . \sqrt[3]{r} . \sqrt[3]{r} = r$ ☐

18 Unir las operaciones con igual resultado.

a) $(2 . 2)^2$

d) $\left(2^4\right)^3 : 2^{10}$

b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

c) $2^5 : 2^3 . 2$

f) $2 : 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{2^8}$

$\sqrt{\sqrt{2^{12}}}$

$\sqrt{2^6} . \sqrt{2^4}$

$\sqrt{10} : \sqrt{5}$

$\sqrt{2} . \sqrt{2}$

$\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2^5} . \sqrt[3]{2}$

19 **Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la potenciación.**

a) $\dfrac{(r^3 . r)^2 . x^7}{(r^2)^4 . r^6}$

b) $\dfrac{(a^3 . b^4)^5 . a^2}{(a^5 . b^7)^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{p^3}}{p^2 . \sqrt{p}}$

d) $\sqrt{\dfrac{s^5}{\sqrt{s^3}}}$

20 **Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la radicación.**

a) $\sqrt{m^5} . \sqrt{m} . \sqrt{m^6}$

b) $\sqrt[4]{r^3 . w^7} . \sqrt[4]{r^5 . w^5}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{a^{15}}{b^{25}}}$

d) $\sqrt[10]{n^2} . \sqrt[15]{n^6} . \sqrt[20]{n^{12}}$

21 **Resolver aplicando propiedades.**

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-7} . \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5} - \dfrac{\sqrt{5} . \sqrt{5}}{3} - \dfrac{(3^3)^3}{3^{11}} =$

b) $\dfrac{2^5}{2^8} + 2^{-3} + \left(\sqrt{\sqrt{2^8}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} =$

c) $\dfrac{\sqrt{8} . \sqrt{10}}{\sqrt{5}} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} + \sqrt{\sqrt[3]{7^{12}}} =$

d) $\dfrac{3^{18}}{9^{10}} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{729}} - 3^{-3} =$

Para pensar y resolver

22 **Factorizar el radicando y hallar el valor de cada raíz aplicando propiedades.**

a) $\sqrt{2916}$

b) $\sqrt[3]{5832}$

c) $\sqrt[4]{20736}$

Unidad I: Expresiones algebraicas. Polinomios

PROF. DE MATEMÁTICA

Expresiones algebraicas. Polinomios

Teoría

Una **expresión algebraica** es una combinación finita de números, letras, o números y letras, ligados entre sí por la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y/o la radicación. Los números se denominan **coeficientes** (salvo los exponentes de las potencias) y las letras, **variables** o indeterminadas.

a) $\frac{3-0{,}5w}{2}$ **b)** $3x^2-2^3$ **c)** $\sqrt{a}+c^5$ **d)** $\frac{3+z}{2}$ **e)** $\frac{r+1}{s-2}$ **f)** $\sqrt{5}x^5$

Cuando la variable no está afectada por una raíz o no actúa como divisor, las expresiones algebraicas son **enteras** y se denominan **polinomios**. Los ejemplos **c)** y **e)** no son polinomios; sí lo son **a)**, **b)**, **d)** y **f)**.

1 **Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.**

a) $\frac{3-5^{-1}}{2}$ ☐ **d)** $\frac{7x^5}{x}$ ☐ **g)** $2a^{\frac{3}{4}}-5b^{\frac{1}{2}}$ ☐

b) $\sqrt{3x}-y$ ☐ **e)** $3z^4-\frac{1}{5}m^5$ ☐ **h)** $\frac{6}{(x-y)^{-2}}$ ☐

c) $4x^{-3}$ ☐ **f)** $\left(\sqrt{3}x-1\right):z$ ☐ **i)** $\frac{4w^{-5}}{9w^{-3}}$ ☐

Polinomios de variable x

Teoría

Un **monomio** es un polinomio de un solo término y su grado es el valor del exponente de la variable x.

a) $\frac{1}{3}x \longrightarrow$ grado 1 **b)** $0{,}7x^3 \longrightarrow$ grado 3 **c)** $2{,}5 \longrightarrow$ grado 0 **d)** $2^5 . x^4 \longrightarrow$ grado 4

Dos monomios son **semejantes** cuando tienen el mismo grado, por ejemplo $-2x^2$ y $\frac{3}{4}x^2$.

Un **polinomio** es una suma algebraica de monomios y está **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.

a) $P(x) = \underbrace{-3x^2+5-0{,}4x+\frac{2}{7}x^3}_{\text{reducido}}$ **b)** $Q(x) = 5x-6x^2+3x+x^2-4 = \underbrace{-5x^2+8x-4}_{\text{reducido}}$

El **valor numérico** de un polinomio es el valor que se obtiene al reemplazar **x** por algún número real.

Por ejemplo: $P(x) = 5x^2+3x-7 \Rightarrow \begin{cases} P(2) = 5\,.\,2^2+3\,.\,2-7 = 20+6-7 = 19 \\ P(-1) = 5\,.\,(-1)^2+3\,.\,(-1)-7 = 5-3-7 = -5 \end{cases}$

2 **Hallar el polinomio reducido en cada caso.**

a) $2x-x^2+2-7x+5x^2+3x-8 =$

b) $x^5-x^2-x+x^3-x^5+x-x^2+x^3+x =$

c) $\frac{1}{2}x^3-5x+x^3+3x^2-4x-7-\frac{3}{2}x^3 =$

d) $5x^4-3x+4x^2-0{,}5x+x^3-9+x =$

e) $\frac{2}{3}-0{,}\widehat{2}x^2+1{,}\widehat{1}-\frac{5}{6}x^2-4x^4+\frac{5}{3}x^2 =$

Teoría

El **grado** de un polinomio reducido es el grado de su mayor monomio no nulo.
El **coeficiente principal** es el coeficiente del monomio de mayor grado.
El **término independiente** es el coeficiente del monomio de grado cero.
Un polinomio está **ordenado** cuando sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

$$\underbrace{3x - 5x^3 + 4 + 2x^2}_{\text{No está ordenado}} = \underbrace{-5x^3 + 2x^2 + 3x + 4}_{\text{Ordenado de manera decreciente}} = \underbrace{4 + 3x + 2x^2 - 5x^3}_{\text{Ordenado de manera creciente}} \rightarrow \begin{cases} \text{grado: } 3 \\ \text{coeficiente principal: } -5 \\ \text{término independiente: } 4 \end{cases}$$

Un polinomio está **completo** cuando tiene todas las potencias decrecientes del grado.

a) $P(x) = \underbrace{3x^4 - 2x + 5x^2 + 1}_{\text{No está completo}}$

b) $Q(x) = \underbrace{5 + 7x - 4x^5 + 3x^2 - x^4 + 2x^3}_{\text{Está completo}}$

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan con coeficiente 0.

$R(x) = 2 - 5x^4 + 3x^2 = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 2$

Según la cantidad de términos, un polinomio reducido recibe los siguientes nombres: si tiene 1término, **mo**nomio; 2 términos, **bi**nomio; 3 términos, **tri**nomio; 4 términos, **cuatri**nomio; y luego, polinomio de **n** términos.

Ejercitación

3 **Escribir un polinomio reducido que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.**

a) Binomio de grado tres y término independiente irracional.

b) Trinomio completo con coeficientes negativos.

c) Monomio de grado seis y coeficiente principal no entero.

d) Cuatrinomio de grado cinco y coeficientes irracionales.

4 **Unir los polinomios iguales.**

a) $3 - x^2 + 5x^3 + 0{,}2x^2 - 4x^3 + \frac{8}{10}x^2$

b) $\frac{1}{4}x^4 - 2x + 6x^2 - 0{,}25x^4 + 3x - 5x^2$

c) $0{,}\widehat{3}x - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - 7 + x^3 - \frac{1}{3}x + 0{,}5x^4$

d) $-1{,}5x^3 + 2 - x + \frac{1}{2}x^3 + 2x + x^3 - 6$

e) $\frac{5}{6}x^5 - 1{,}2x^3 + x^2 + 0{,}1\widehat{6}x^5 + \frac{1}{5}x^3 - x^2$

$x^4 - 7$

$x - 4$

$x^2 - x^3$

$x^5 - x^3$

$x^2 + x$

$x^3 + 3$

5 **Completar y ordenar los siguientes polinomios.**

a) $-2x^3 + 5 + x =$

b) $4 + 2x^5 - 3x^2 - x =$

c) $5x - x^4 + 1 =$

d) $-2 + x^3 + 4x - 3x^6 =$

Para trabajar en clase

Adición y sustracción de polinomios

Teoría

Dados los polinomios: $P(x) = 5x - 3 + 4x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = 2x^3 - x + 6x^2 - 4$

- Para sumar dos polinomios, se suman sus monomios semejantes; y para restarlos, se suman los opuestos del polinomio que resta.

a) $P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \quad 2x^3 + 6x^2 - \ x - 4 \\ \hline 6x^3 + 4x^2 + 4x - 7 \end{array}$$

b) $P(x) - Q(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \quad -2x^3 - 6x^2 + \ x + 4 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 \end{array}$$

- Para multiplicar o dividir un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva y se multiplica o divide cada uno de sus coeficientes por el número real.

a) $-3 \,.\, P(x) = -3 \,.\left(4x^3 - 2x^2 + 5x - 3\right) = -12x^3 + 6x^2 - 15x + 9$

b) $Q(x) : 4 = \dfrac{2x^3 + 6x^2 - x - 4}{4} = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x - 1$

Ejercitación

6 Dados los siguientes polinomios:

$A(x) = -5 + 3x^3 + 2x - x^4 + 4x^2$, $B(x) = 5x^3 - 3x + 2x^2 - 3x^4 - 3$ y $C(x) = -6x^2 + 4x - 2x^3 - 8 + 2x^4$

Resolver las siguientes operaciones.

a) $A(x) + B(x) + C(x)$

d) $3C(x) - 2B(x)$

b) $B(x) - A(x)$

e) $C(x) : (-2) - 5A(x)$

c) $C(x) - (A(x) + B(x))$

f) $4A(x) - 3 \,.\, (B(x) + C(x))$

Multiplicación de polinomios

Teoría

Para multiplicar dos polinomios, se debe aplicar la propiedad distributiva y la propiedad del producto de dos potencias de igual base: $x^n . x^m = x^{n+m}$

a) $-\frac{2}{3}x^2 \cdot \left(\frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{9}{8}x^2 - \frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2$

b) $\left(-2x^3 + 5x\right)\left(3x^2 - 4x\right) = -2x^3 . 3x^2 - 2x^3 . (-4x) + 5x . 3x^2 + 5x . (-4x) = -6x^5 + 8x^4 + 15x^3 - 20x^2$

Ejercitación

7 **Resolver los siguientes productos.**

a) $-\frac{3}{5}x^2 . 0,\widehat{5}x . (-0,2x) =$

b) $\frac{5}{4}x . \left(-0,6x^3\right) . 2x =$

c) $-x^2 . 0,5x . \left(-x^3\right) =$

d) $x^3 . \left(-0,\widehat{3}x\right) . 1,2x =$

e) $-1,5x . \left(-\frac{5}{6}x^4\right) . \left(-0,3x^2\right) =$

f) $0,75x^4 . \left(-\frac{2}{5}x^3\right) . \left(-x^2\right) =$

8 **Resolver las siguientes operaciones.**

a) $-0,8x . \left(15x - 2,5x^3 + 10 - \frac{15}{8}x^2\right) =$

b) $\left(-1,\widehat{3}x^4 - \frac{2}{9}x + \frac{5}{6}x^5 - 0,\widehat{4}\right) . 2,25x^4 =$

c) $\left(-3x^5 + 2x^3\right)\left(4x^2 + 5x\right) =$

d) $\left(2x^2 + 3x - 1\right)\left(7x - 4\right) =$

e) $-2x^2 . (3x - 4) - 5x\left(8 - x^2\right) =$

f) $\left(6x^3 - 2x^2\right)\left(-4x^3\right) - \left(2x^4 - 3x^3\right)\left(-x^2 + 4x\right) =$

Cuadrado de un binomio

Teoría

Para elevar un binomio al cuadrado, se lo debe multiplicar por sí mismo.

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En conclusión: $\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$

a) $(x+5)^2 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

b) $(2x-3)^2 = (2x)^2 + 2.2x.(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Ejercitación

9 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $(x+2)^2 = x^2 + 4$ ☐

b) $(x-3)^2 = x^2 - 6x - 9$ ☐

c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + 0{,}25$ ☐

d) $(x+3)^2 = x^2 + 9 + 6x$ ☐

e) $(3x+1)^2 = 3x^2 + 6x + 1$ ☐

f) $(-x-1)^2 = -x^2 + 2x - 1$ ☐

10 **Unir cada cuadrado de binomio con su correspondiente trinomio cuadrado perfecto.**

a) $(x+1)^2$

b) $(x-1)^2$

c) $(-x+1)^2$

d) $(-x-1)^2$

e) $-(x+1)^2$

f) $-(x-1)^2$

$x^2 + 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1$

$-x^2 + 2x - 1$

$-x^2 - 2x - 1$

$x^2 + 2x + 1$

11 **Completar los siguientes casilleros vacíos.**

a) $(x + \square)^2 = x^2 + 10x + \square$

b) $(\square + \square)^2 = 4x^2 + \square + 49$

c) $(\square + 2)^2 = \square + 12x + \square$

d) $(\square + \square)^2 = 25x^2 + 30x + \square$

12 **Desarrollar los siguientes cuadrados.**

a) $(2x^2 + 3x)^2 =$

b) $(x^3 - x^2)^2 =$

c) $(-5x^4 + x^5)^2 =$

Cubo de un binomio

Teoría

Para elevar un binomio al cubo, se lo multiplica por su cuadrado:

$(a+b)^3 = (a+b)^2 . (a+b) = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) . (a+b) =$

$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

En conclusión: $\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$

a) $(x+6)^3 = x^3 + 3.x^2.6 + 3.x.6^2 + 6^3 = x^3 + 18x^2 + 108x + 216$

b) $(3x-4)^2 = (3x)^3 + 3.(3x)^2.(-4) + 3.3x.(-4)^2 + (-4)^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

Ejercitación

13 **Desarrollar los siguientes cubos.**

a) $(x+5)^3 =$

b) $(-x-3)^3 =$

c) $(2x+7)^3 =$

d) $\left(-x^2+4x\right)^3 =$

e) $\left(5x^3-2x^2\right)^3 =$

14 **Resolver las siguientes operaciones.**

a) $(2x-3)^2 + (3x-1)(2-5x) =$

b) $\left(3x^2-4x\right)\left(6x^2-7\right) - \left(x^2+5x\right)^2 =$

c) $(x-2)^3 + (2x-5)\left(3x-x^2\right) =$

d) $\left(3x^2-2x\right)(x-6)^2 - \left(2x-x^2\right)^3 =$

Para pensar y resolver

15 **Demostrar geométricamente que la superficie del siguiente cuadrado es $m^2 + 2mn + n^2$.**

16 Reducir cada polinomio.

a) $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - 0{,}25x + 2x^2 - 0{,}\widehat{6}x^3 + \frac{2}{5}x - 3x^2 =$

b) $Q(x) = -0{,}8 + \frac{3}{4}x^5 - x^4 - x^5 + \frac{1}{4} + 0{,}25x^5 + 0{,}7x =$

c) $R(x) = -0{,}2x - \frac{2}{9} + \frac{4}{5}x^5 - 0{,}\widehat{7} + \frac{1}{5}x + 1 - 1{,}5x^5 =$

d) $T(x) = \frac{3}{7}x^6 - x^3 + 0{,}3x - 4{,}5 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{2} - 0{,}\widehat{3}x =$

e) $S(x) = -1{,}\widehat{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{8} + \frac{2}{9}x^4 - 3x^3 - 0{,}5 + x^4 =$

f) **Completar la tabla.**

Polinomio	Nombre	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
P(x)				
Q(x)				
R(x)				
T(x)				
S(x)				

17 Hallar el valor numérico de cada polinomio.

a) $E(x) = -3x^3 + 5x - 2x^2 - 7 \longrightarrow E(2) =$

b) $H(x) = 4x - 2x^4 + 3x^2 - x^5 \longrightarrow H(-1) =$

c) $G(x) = 5x^2 - x^3 - 2x^4 + x \longrightarrow G(-2) =$

d) $K(x) = -2x^5 + 3x^3 + 4x - 8 \longrightarrow K(3) =$

18 Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a) $x^3 - x^2 = x$ ☐

b) $x(x + 3) - 3 = x^2$ ☐

c) $x + x + x^2 = x(x + 2)$ ☐

d) $\frac{10x - 5}{2} = 5(x - 1)$ ☐

e) $(x - 1)(x + 1) = x(x - 1) + x - 1$ ☐

f) $x^2 + 36 = (x + 6)^2$ ☐

g) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4x + 4$ ☐

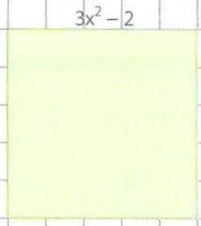
h) $x^2 + 100 = (x - 10)^2 - 20x$ ☐

i) $3x^3 . \left(2x^2 - x^2\right) = 3x^5$ ☐

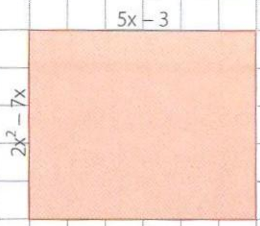
j) $(x - 5)^2 = (x + 5)(x - 5) - 10x$ ☐

19 Hallar la expresión del perímetro y del área de cada figura.

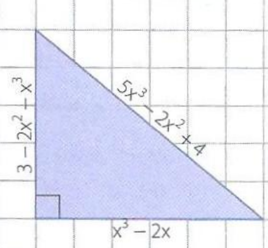
a)



b)



c)



20 Desarrollar las siguientes potencias.

a) $\left(4x^2 - 5x\right)^2 =$

b) $\left(2x^5 - 3x^3\right)^2 =$

c) $\left(4x - 3\right)^3 =$

d) $\left(-6x^2 + x\right)^3 =$

21 Resolver las siguientes operaciones.

a) $\left(-3x + 2x^2\right)\left(x^2 - x^3 + 4x\right) =$

d) $\left(x - 8\right)^3 + \left(5 - 3x - x^2\right) . \left(-4x\right) =$

b) $-5x^3 . \left(4x - 5x^2 - 3 + 8x^4\right) =$

e) $\left(2x - 1\right)\left(x - 3\right)^2 - 5x\left(2x - 7x^2 + 3\right) =$

c) $-3x . \left(2x - 5\right) - \left(2x + 3\right)^2 =$

f) $\left(x + 2\right)\left(x - 1\right)^3 - \left(3x^2 + 2x\right)^2 =$

Ejercicios combinados

1) Dados los polinomios:

$A(x) = x - 1$ $B(x) = x^2 - 2x$ $C(x) = 2 - 3x^2 + 2x$ $D(x) = x + 1$

Resuelvan las siguientes operaciones identificando los productos notables que hubiera.

$a)\ B^2 - A$ $b)\ A \cdot B - C$ $c)\ A^2 - B$ $d)\ A \cdot D + B$

e) $C + 3 \cdot B$ *f)* $2 \cdot B - A \cdot D$ *g)* $C^2 + x \cdot B - 2x^2 A$ *h)* $C - 2 \cdot (B + A) + 4x^3 D$

DIVISIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

División de monomios

Ejemplo:

$$8x^5 : 2x^3 = (8:2)(x^5 : x^3)$$
$$= 4x^2$$

Para tener en cuenta: al dividir la indeterminada restamos sus exponentes ya que es un cociente de potencias de igual base.

División de un polinomio por un monomio

Ejemplo:

$$(6x^5 + 3x^3 - 9x) : (-3x) = 6x^5 : (-3x) + 3x^3 : (-3x) - 9x : (-3x)$$
$$= -2x^4 - x^2 + 3$$

Actividades

1) Efectúen las siguientes divisiones de monomios:

$a)\ (2x^4) : \left(\frac{1}{4}x^2\right)$ $b)\ (-10x^2) : (5x^2)$ $c)\ (20x^3) : (0{,}5x)$

2) Realicen las divisiones.

$a)\ (8x^4 - 6x^3 + 10x^2) : (-2x^2)$ $b)\ (2x^2 + 6x + 4x) : (x)$

$c)\ (6x^5 - 9x^3 + 3x^2) : (3x)$ $d)\ (14x^3 - 28x^4) : (-7x^2)$

3) Resuelvan las operaciones combinadas con polinomios:

$a)\ (x + 2) \cdot (x - 2) + (2x - 1) \cdot (x + 1)$ $b)\ (2x - 2) \cdot (3x - 1) - (6x - 1) \cdot (x + 2)$

$c)\ 2x(2y + x) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$ $d)\ 8x^3 - 2x[y - 2x(y - 2x) - y]$

$e)\ \frac{1}{7}(105x^2 - 63x - 84) - (120x^2 - 72x - 96)$ $f)\ (x^2 - 2x) : (-2x) + 6(3x^2 + x + 2)$

$g)\ (6x^4 - 3x^3 - x) : (3x) + (x + 5) \cdot (x + 2)$ $h)\ 3x^2 + (x + 3) \cdot (x + 4) - (2x^5 + x^3) : (-x^2)$

$i)\ x(2 - x)^2 + 4x^2 - 7$ $j)\ (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 3) + (2x^2 + 1)^2$

$k)\ (x + 2)^2 + (2x^2) : \frac{1}{4}x^3 + x \cdot (-x)$ $l)\ (2x^3 + 3) \cdot (2x^3 - 3) - (8x^6 - 18) : 2$

Regla de Ruffini

Teoría

Es un método que se utiliza para dividir un polinomio por otro de la forma $x + a$.

Por ejemplo: $\left(-6x + 3x^3 - 5 + 5x^2\right) : (x + 2)$.

El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado. $\longrightarrow 3x^3 + 5x^2 - 6x - 5$

Se escriben los coeficientes del dividendo.
El coeficiente principal se “baja” igual, se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente.
Así sucesivamente hasta llegar al último, que es el resto R(x).
Los valores que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.
El polinomio cociente C(x) es un grado menor que el dividendo.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & 5 & -6 & -5 \\
 & & + & + & + \\
-2 & \downarrow & -6 & 2 & 8 \\
\hline
 & 3 & -1 & -4 & \boxed{3}
\end{array}
$$

$C(x) = 3x^2 - x - 4$ $\quad$ $R(x) = 3$

a) $\underbrace{\left(-5x + x^3 - 7\right)}_{x^3 + 0x^2 - 5x - 7} : (x - 3)$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -5 & -7 \\
3 & & 3 & 9 & 12 \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & \boxed{5}
\end{array}
$$

Cociente: $x^2 + 3x + 4$ y resto: 5

b) $\underbrace{\left(2x^2 + x^4 - x\right)}_{x^4 + 0x^3 + 2x^2 - x + 0} : (x + 1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
-1 & & -1 & 1 & -3 & 4 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & -4 & \boxed{4}
\end{array}
$$

Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$ y resto: 4

Teorema del resto

Teoría

El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$ es **el valor numérico** del polinomio, cuando se reemplaza su variable por el opuesto del término independiente del divisor.

a) $P(x) = -5x + x^3 - 7$ y $Q(x) = x - 3$

El resto de $P(x) : Q(x)$ es $P(3)$

$P(3) = -5 \,.\, 3 + 3^3 - 7 = -15 + 27 - 7 = 5$

Resto : 5

b) $P(x) = 2x^2 + x^4 - x$ y $Q(x) = x + 1$

El resto de $P(x) : Q(x)$ es $P(-1)$

$P(-1) = 2\left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^4 - \left(-1\right) = 2 + 1 + 1 = 4$

Resto: 4

Si el resto es 0, la división es **exacta** y significa que P(x) es **divisible** por Q(x).

$\left(x^2 - x - 6\right) : (x + 2) \longrightarrow (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0 \longrightarrow x^2 - x - 6$ es divisible por $x + 2$

Ejercitación

26 **Hallar el cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini.**

a) $\left(5x^2 - 4x - 7\right) : (x - 2)$

b) $\left(6 - x^2 + x^3 - 2x\right) : (x + 1)$

c) $\left(12x - 5 - x^3\right) : (x - 4)$

d) $\left(-3 + x^4 + 9x + x^2\right) : (x + 2)$

27 **Calcular el resto de las siguientes divisiones.**

a) $\left(3x^2 + 5 - 8x\right) : (x - 2)$

b) $\left(-x^2 + 3x^3 - 2 + x\right) : (x + 1)$

c) $\left(x^4 - 2x^2 - 25 - 3x^3\right) : (x - 3)$

d) $\left(-15 - x^3 - 7x + x^5\right) : (x + 2)$

28 **Unir cada polinomio con el o los binomios por los que son divisibles.**

a) $x^2 - 2x - 3$

b) $x^3 + x^2 - 3x - 3$

c) $x^4 - 16$

d) $x^2 - x - 2$

e) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

f) $x^2 - 9$

$x + 1$ $\quad$ $x - 1$ $\quad$ $x - 2$ $\quad$ $x + 2$ $\quad$ $x + 3$ $\quad$ $x - 3$

Para pensar y resolver

29 El polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es divisible por $(x - 1)$, $(x + 2)$ y $(x + a)$.
Encontrar el valor de a que verifique el enunciado.

Tarea para el hogar

30 Unir las operaciones con el mismo resultado.

a) $2x^5 . \left(-3x^4\right) : \left(8x^4\right)$

b) $-8x^{10} : \left(4x^3\right)^2$

c) $3x^2 . \left(2x^2\right)^3 : \left(-30x^5\right)$

d) $-24x^{13} : \left(-10x^4\right) : (2x)^4$

e) $\left(6x^7\right)^2 . (-x) : \left(-60x^{11}\right)$

$15x^{11} : \left(10x^3\right)^2$

$-8x^9 : \left(10x^6\right)$

$(-2x)^6 : (-2x)^3$

$\left(2x^6\right)^4 : \left(-2x^4\right)^5$

$-3x^7 : (2x)^2$

$-12x^{13} : \left(-20x^9\right)$

31 Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $\left(8x - 7x^2 - 5x^3 + 1\right) : \left(2x + x^2\right)$

b) $\left(19x - 10x^2 - 11 + 6x^3\right) : (3x - 2)$

c) $\left(12x^3 - 29x^2 - 7x + 5x^4\right) : \left(5x^2 - 3x\right)$

d) $\left(x^5 + 28 - 40x\right) : \left(2 + x^2 - 3x\right)$

32 Resolver las siguientes operaciones.

a) $\left(12x^2 - 3 + x - 4x^3\right) : (2x - 1) + (x + 2)^2 =$

b) $5x^3 + 9x - \left(x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 3x^4\right) : \left(x^2 - 3x\right) =$

c) $3\left(x^4 - 1\right) : \left(x^2 + 1\right) + (3x - 5)^2 - x(2 - 4x) =$

33 **Hallar el cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini.**

a) $\left(-5+2x^2-x^3+4x\right):(x-3)$

b) $\left(4x-x^2+2x^3\right):(x+2)$

c) $\left(6x^2-3x+x^3-x^4\right):(x+1)$

d) $\left(x^3-x^5+3\right):(x-2)$

34 **Marcar con una X las divisiones exactas.**

a) $\left(x^2-10+3x\right):(x+5)$ ☐

b) $\left(4x-5+2x^2\right):(x-3)$ ☐

c) $\left(-x^3+5x-x^2+6\right):(x+2)$ ☐

d) $\left(3x^2-x^5-2\right):(x-1)$ ☐

e) $\left(x^4-81\right):(x+3)$ ☐

f) $\left(-2x+x^5-3x^3\right):(x-4)$ ☐

35 **Resolver las siguientes operaciones.**

a) $\left(x+x^2-20\right):(x+5)+\left(4x^3-6x^2\right):\left(-2x^2\right)=$

b) $(5x-2)^2-\left(-9x^2-3+3x^3+x\right):(x-3)=$

c) $\left(3x^4-48\right):(x+2)+(2x-3)^3=$

d) $\left(x^3-8\right):(x-2)-\left(2x^3+54\right):(x+3)=$

Ejercicios de repaso

36 **Reducir cada polinomio y unirlo con el enunciado que corresponda.**

a) $-\frac{2}{5}x^3 + 5x^2 - 0,6 + 0,4x^3 - 7x^2$

b) $0,\widehat{3}x - 2x^5 + 1,5x^3 + 0,5x^5 - x + \frac{3}{2}x^5 + 8$

c) $0,2x + \frac{2}{3} - 2x^5 + \frac{4}{5}x - 0,\widehat{6} + 1,3x^5 - x$

d) $4x^4 + \frac{1}{2}x - x^2 + 0,8 - x^4 - 0,75x - 1,5$

e) $-\frac{5}{8}x^3 + 1,4x^2 - 0,2 + 0,125x^3 + \frac{1}{4}x + 0,5x^3$

- Trinomio de grado 2
- Monomio de grado 5
- Binomio de grado 3
- Cuatrinomio de grado 4
- Trinomio de grado 3
- Binomio de grado 2

37 Dados los siguientes polinomios:

$R(x) = -2x^3 - 3x + 4x^4 - x^2 + 5$, $T(x) = 3x^2 + 5 - 7x^3 - 2x + 3x^4$ y $S(x) = -6 - 5x^4 + 8x^2 - x + 2x^3$

Resolver las siguientes operaciones.

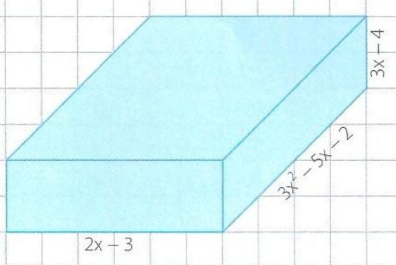
a) $R(x) + T(x) + S(x)$

c) $3T(x) - 2R(x)$

b) $R(x) - S(x)$

d) $\frac{1}{2}S(x) - \frac{1}{3}T(x)$

38 **Hallar la expresión reducida del volumen del siguiente prisma.**



39 **Marcar con una X los trinomios cuadrados perfectos.**

a) $x^2 - 4x - 4$ ☐

b) $x^2 + 9 - 6x$ ☐

c) $\frac{1}{4} + x^2 - x$ ☐

d) $4x^2 + 20x + 25$ ☐

e) $x^2 + x^4 - 2x^3$ ☐

f) $8x - x^2 - 16$ ☐

40 Resolver las siguientes operaciones.

a) $\left(3x^2-2x+1\right)\left(5x-2\right)-\left(3x+2x^2-4x^2-5\right)=$

c) $\left(2x^2-4x\right)^2-\left(3-5x^2\right)\left(3x-x^2+6\right)=$

b) $\left(-8x^5+20x^3+16x^4\right):\left(-4x^2\right)+\left(2x-5-3x^2\right).\left(-4x\right)=$

d) $\left(-5+3x-x^2\right)\left(4x-1\right)-\left(3x+2\right)^3=$

41 Hallar el cociente y el resto de las siguiente divisiones.

a) $\left(-5+3x^2-x^3+4x\right):\left(3x+x^2\right)$

c) $\left(35x-27x^2-18+9x^3\right):\left(5+3x^2-4x\right)$

b) $\left(3x-4x^4+7-5x^2\right):\left(2x^2-3\right)$

d) $\left(13x^3-8x-7x^4+5-6x^2+x^5\right):\left(x^3-2x^2\right)$

42 Resolver las siguientes operaciones.

a) $\left(2x^3-21+41x-17x^2\right):\left(2x-7\right)-\left(2x+5\right)^2=$

b) $\left(x-x^2\right)\left(2-x\right)-\left(-3x^4+11x^2-12x+2x^5\right):\left(3+x^2-2x\right)=$

c) $\left(30x+2x^6-x^3-7x^5-10x^2+x^4\right):\left(x^3-2x\right)-\left(3-x\right)^3=$

Ejercicios de repaso

43 **Hallar el cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini.**

a) $\left(-5x^2+4-2x^3-6x\right):(x-1)$

c) $\left(3x-x^5+2x^3-4\right):(x-3)$

b) $\left(1-x^4+2x-3x^3\right):(x+2)$

d) $\left(-x^7+3x-x^4+5x^2\right):(x+1)$

44 **Unir cada división con su resto.**

a) $\left(-x+2x^3-5x^2+3\right):(x+1)$

d) $\left(8+2x^3-5x^2-8x\right):(x-3)$

b) $\left(x^2-3x-x^3+12\right):(x-2)$

e) $\left(7x+12x^2+2x^3-30\right):(x+4)$

c) $\left(-5x^4+2x^3-50x-6\right):(x+2)$

-7

4

6

-2

-3

2

45 **Resolver las siguientes operaciones.**

a) $\left(x^5-5x^3+x^4-4x^2+3x-2\right):(x+2)-\left(2x^2-3x\right)^2-(3x+7)=$

b) $\left(x^5-32\right):(x-2)-(3x-9)^2:(x-3)+\left(5x^3+5\right):(x+1)=$

Unidad II: Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio (o una función polinómica) significa que el polinomio expresado como sumas yrestas lo podré expresar como un **producto del coeficiente principal y de polinomios mónicos primos**.

- ¿qué es un polinomio primo? son aquellos polinomios de grado no nulo que no pueden descomponerse como producto de otros polinomios de grado positivo menor. Solamente son primos los polinomios de grado uno y los de grado dos sin raíces reales.

Los polinomios que no son primos son compuestos. Todos los polinomios de grado impar mayor que uno son compuestos

- ¿qué es un polinomio mónico? Se llama así a un polinomio de grado y coeficiente principal igual a uno (ambos son iguales a 1)

Teorema fundamental del álgebra (TFA)

Recordemos que un valor de **x** es ***raíz*** de P(x) si el polinomio se anula para ese valor . Además, si P(x) está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de P(x).

Observen los siguientes ejemplos:

Polinomio expresado como producto	Raíces reales	Cantidad de raíces reales
$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$	$x = 1; x = 2; x = -3$	Tres
$Q(x) = (x-7)(x-4)(x-4)$	$x = 7; x = 4$ (raíz doble)	Tres
$R(x) = (x+5)(x+5)(x+5)$	$x = -5$ (raíz triple)	Tres
$S(x) = (x-8)(x^2+1)$	$x = 8$	Una

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama *raíz* ***múltiple***. Por eso, $x = 4$ es *raíz doble* de Q(x) (se cuentan como *dos* raíces), y $x = -5$ es *raíz triple* de R(x) (se cuentan como *tres* raíces).

En la tabla anterior figuran las *raíces reales*, pero un polinomio puede tener raíces **reales** y raíces **no reales**. Existe un teorema, llamado **teorema fundamental del álgebra (TFA)**, a partir del cual podemos afirmar que **un polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces**, considerando las reales y las no reales.

Otra consecuencia de este teorema es la siguiente:

> Un polinomio de grado *n* tiene como máximo *n* raíces reales.

Raíces de polinomios de grados uno y dos

Para hallar la única raíz de un polinomio de grado uno, es decir de un polinomio de la forma $ax + b$, planteamos la ecuación $ax + b = 0$ y despejamos x; entonces: $x = \frac{-b}{a}$

Ejemplo: $P(x) = 3x - 4 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x =$ .... es la raíz de P(x).

Para hallar las raíces x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado, es decir, de un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ aplicando la fórmula resolvente. Si las raíces son reales, podemos escribir el polinomio mediante este producto: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Fórmula resolvente

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) pueden obtenerse reemplazando los coeficientes a, b y c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Para abreviar, las reunimos en una sola fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observaciones: como en esta fórmula hay una raíz cuadrada, si el *radicando* es negativo diremos que la ecuación que intentamos resolver *no tiene solución en el conjunto de los números reales.*

Si la ecuación es cuadrática, pero no tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, resolvemos todas las operaciones indicadas para reducirla a esa forma.

- **Si la ecuación no tiene término lineal ($b = 0$)**, se despeja directamente la incógnita.
- **Si la ecuación no tiene término independiente ($c = 0$)**, se extrae factor común x. En este caso, $x = 0$ es siempre una de las soluciones. La otra solución se obtiene igualando a 0 el otro factòr.

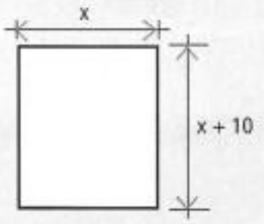
$p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ejemplo1: Resolvamos la ecuación $\mathbf{3x^2 - 2x - 1 = 0}$ aplicando la fórmula resolvente.

- Identificamos los coeficientes ⟶ $a = \dots\dots$ $b = \dots\dots$ $c = \dots\dots$
- Reemplazamos en la fórmula ⟶ $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}}{\dots\dots\dots}$
- Operamos ⟶ $x_1, x_2 = \dfrac{\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots\dots}}{6} = \dfrac{\dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots\dots}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$
- **Atención con este paso:** el símbolo ± indica que una de las soluciones se obtiene usando el +, y la otra, usando el –, así:

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} \Rightarrow x_1 = \dots\dots \\[2ex] x_2 = \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} \Rightarrow x_2 = \dots\dots \end{cases}$$

Ejemplo 2: Un diagramador está definiendo las dimensiones que tendrá una revista. Necesita que el largo sea 10 cm mayor que el ancho y que la superficie de cada página resulte de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que cumplen ambas condiciones?



- Planteamos la ecuación ⟶ $x(x + 10) = \dots\dots$
- Aplicamos la propiedad distributiva ⟶ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots$
- Pasamos 600 al primer miembro ⟶ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$
- Identificamos los coeficientes ⟶ $a = \dots\dots$ $b = \dots\dots$ $c = \dots\dots$
- Aplicamos la fórmula resolvente y calculamos:

$$x_1, x_2 = \frac{\dots\dots \pm \dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- Como soluciones de la ecuación obtuvimos $\mathbf{x_1} = \dots\dots$ y $\mathbf{x_2} = \dots\dots$. Descartamos ...... porque no tiene sentido en este problema y concluimos que la revista tendrá .... cm de largo y .... cm de ancho.

Volvamos a los polinomios de grado 2 o polinomios cuadráticos,

Ejemplo: $Q(x) = x^2 + 5x - 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\Rightarrow x_1 = \dots\dots\dots$ y $x_2 = \dots\dots\dots$ son las raíces de Q(x), que puede escribirse así: ....

Raíces de polinomios de la forma $P(x) = ax^n + b$

Un polinomio de la forma $\mathbf{ax^n + b}$ (siendo **a** y **b** números reales distintos de 0) puede o no tener raíces reales. Si las tiene, éstas son una o dos.

Para hallar las raíces reales de un polinomio de esa forma, despejamos x de la ecuación: $\mathbf{ax^n + b = 0}$

Ejemplo 1: Hallemos las raíces reales de $R(x) = 2x^7 - 2$

$R(x) = 0 \Rightarrow 2x^7 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^7 =$ .... $\Rightarrow x^7 =$ .... $\Rightarrow \sqrt[7]{x^7} = \sqrt[7]{1} \Rightarrow x =$ ....

Ésta es la única raíz real del polinomio R(x).

Ejemplo 2: Hallemos las raíces reales de $S(x) = 5x^6 - 320$

$S(x) = 0 \Rightarrow 5x^6 - 320 = 0 \Rightarrow x^6 =$ .... $\Rightarrow \sqrt[6]{x^6} =$ .... $\Rightarrow |x| =$ .... $\Rightarrow x_1 =$.......... y $x_2 =$.......... son las únicas raíces reales de S(x).

Ejemplo 3: Intentemos hallar las raíces reales de $T(x) = 3x^4 + 27$

$T(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 + 27 = 0 \Rightarrow 3x^4 = -27 \Rightarrow x^4 =$ .... $\Rightarrow x \notin \mathbb{R}$, es decir que T(x) no tiene raíces reales.

Polinomios expresados como productos

Ya sabemos cómo hallar las raíces reales de polinomios de grados uno y dos, y de polinomios de la forma: $\mathbf{P(x) = ax^n + b}$. De ahora en más, cuando busquemos las raíces de un polinomio, lo que haremos es buscar sólo las **raíces reales**.

Ahora vamos a ver la ventaja de *expresar un polinomio como producto.*

Para estos ahora vamos a ver algunas técnicas (los casos de factoreo mas conocidos):

Ya vimos el cuadrado de un binomio y el cubo de un binomio cuando vimos multiplicación de polinomios ahora veremos otros casos especiales de factoreo que faltarían y la combinación de los mismos.

Factor común

Teoría

Factorizar un polinomio es transformarlo en un producto de dos o más polinomios primos. Hay varios procedimientos que permiten hacerlo, y uno de ellos es el **factor común**.

El **factor común** es el monomio que se forma con el divisor común mayor de los coeficientes del polinomio y la variable elevada al menor de los exponentes.

a) $24x^5 + 18x^3 - 12x^4 = 6x^3.\left(4x^2 + 3 - 2x\right)$

b) $\frac{12}{25}x^7 + \frac{28}{5}x^5 - \frac{8}{15}x^4 = \frac{4}{5}x^4.\left(\frac{3}{5}x^3 + 7x - \frac{2}{3}\right)$

Ejercitación

1 Completar las siguientes factorizaciones.

a) $4x - 8x^2 + 12\,\boxed{} = 4x\left(3x^2 - \boxed{}\,x + \boxed{}\right)$

b) $\boxed{}\left(3x - 2 + 5x^3\right) = \boxed{} - 8x^2 + \boxed{}\,x^3$

c) $\boxed{} - x^5 - \boxed{} = x^4\left(x^3 - 1 - \boxed{}\right)$

d) $\left(\boxed{} + 3x^3 - 2x + 5\right).\boxed{} = 9\,\boxed{} - 6x^3 + \boxed{} + 21x^4$

e) $\boxed{}\,x^4.\left(\boxed{}\,x^2 + \boxed{} - 5\right) = -12x^6 - 18x^9 + 30x^4$

2 Colocar una X a los polinomios correctamente factorizados.

a) $5x + 10x^2 = 5\left(x + 2x^2\right)$ ☐

b) $3x^4 + 6x^2 = 3x^2.\left(2 + x^2\right)$ ☐

c) $x^3 - x = x\left(1 - x^2\right)$ ☐

d) $x^7 - x^5 = x^4.\left(x^3 - x\right)$ ☐

e) $15x^3 - 20x^2 + 5x = 5x\left(1 + 3x^2 - 4x\right)$ ☐

f) $12x^2 - 4x^3 + 20x^4 = 2x^2.\left(6 - 2x + 10x^2\right)$ ☐

3 Factorizar los siguientes polinomios.

a) $x^5 - x^2 + x^4 =$

b) $21x + 35x^4 - 14 =$

c) $24x^2 + 16x - 40x^4 =$

d) $-6x^3 + 9x^5 - 24x^6 + 30x^4 =$

e) $\frac{5}{6}x^4 + \frac{10}{9}x^7 - \frac{20}{27}x^3 - \frac{25}{12}x^6 =$

f) $1{,}2x^7 + 1{,}8x^3 - 2{,}4x^5 - 3x^2 =$

Factor común por grupos

Teoría

El **factor común por grupos** se aplica a los polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos. Se forman grupos de igual cantidad de términos de manera tal que en cada grupo haya un factor común, y a partir de la factorización de cada grupo, se obtiene un **nuevo factor común**.

a) $\underbrace{2x^3+6x^2}_{2x^2}+\underbrace{5x+15}_{5}=2x^2.\underbrace{(x+3)}_{\text{nuevo factor común}}+5\underbrace{(x+3)}_{\text{nuevo factor común}}=(x+3)(2x^2+5)$

b) $x^5+3x^2-x^3-3=\underbrace{x^5-x^3}_{x^3}+\underbrace{3x^2-3}_{3}=x^3.\underbrace{(x^2-1)}_{\text{nuevo factor común}}+3\underbrace{(x^2-1)}_{\text{nuevo factor común}}=(x^2-1)(x^3+3)$

c) $\underbrace{4x^4+4x^3+8x^2}_{4x^2}\underbrace{-3x^2-3x-6}_{-3}=4x^2.\underbrace{(x^2+x+2)}_{\text{nuevo factor común}}-3\underbrace{(x^2+x+2)}_{\text{nuevo factor común}}=(x^2+x+2)(4x^2-3)$

d) $x^2+7x+10=\underbrace{x^2+5x}_{x}+\underbrace{2x+10}_{2}=x\underbrace{(x+5)}_{\text{nuevo factor común}}+2\underbrace{(x+5)}_{\text{nuevo factor común}}=(x+5)(x+2)$

4 **Unir cada polinomio con su factorización.**

a) $2(x+1)+x(x+1)$

b) $x+1+x(x+1)$

c) $x(x+1)-(x+1)$

d) $x+1-x(x+1)$

e) $x(x+1)-2(x+1)$

f) $2(x+1)-x(x+1)$

$(x+1)(2-x)$ $(x-2)(x+1)$ $(x+1)(x+1)$ $(x-2)(-x+1)$ $(x-1)(x+1)$ $(x+1)(x+2)$ $(1-x)(x+1)$

5 **Factorizar por grupos los siguientes polinomios.**

a) $x^3+x^2+5x+5=$

d) $x^4+x^3-x-1=$

b) $3x^2-6+x^3-2x=$

e) $x^5+3x^4+x^3+2x^2+6x+2=$

c) $2x^4+6-x^5-3x=$

f) $3x^7+6x^5-12x^4-4x^3-8x+16=$

Para pensar y resolver

6 **Factorizar por grupos los siguientes trinomios descomprimiendo alguno de sus términos.**

a) $x^2+10x+21=$

b) $x^2-5x+6=$

c) $2x^2+5x-12=$

Para trabajar en clase

Trinomio cuadrado perfecto

Teoría

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio.

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

a) $x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 9 + 9^2 = (x + 9)^2$

b) $9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \,.\, 3x \,.\, (-5) + (-5)^2 = (3x - 5)^2$

Ejercitación

7 Completar los casilleros para que los trinomios sean cuadrados perfectos.

a) $x^2 + \boxed{\quad} + 36$

b) $x^2 - 14x + \boxed{\quad}$

c) $\boxed{\quad} + 20x + 4$

d) $16x^2 - \boxed{\quad} + 100$

e) $36\,x + 81 + \boxed{\quad}$

f) $64 - \boxed{\quad} + 36x^2$

8 Factorizar los siguientes trinomios cuadrados prefectos.

a) $x^2 + x + 0{,}25 =$

b) $x^4 + x^2 + 2x^3 =$

c) $0{,}\overset{\frown}{1} + x^2 - 0{,}\overset{\frown}{6}x =$

d) $1 - 2x^2 + x^4 =$

e) $2x^4 + x^6 + x^2 =$

f) $x^2 + 0{,}0625 + 4x^4 =$

9 Factorizar los siguientes polinomios combinando los procedimientos.

a) $3x^3 + 12x^2 + 12x =$

b) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x =$

c) $125x^3 + 5x^5 - 50x^4 =$

d) $8x^4 + 24x^3 + 18x^2 =$

e) $4x^9 - 8x^7 + 12x^5 - 24x^3 =$

f) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 8x + 8 =$

Cuatrinomio cubo perfecto

Teoría

Un cuatrinomio cubo perfecto se factoriza como el cubo de un binomio.

$$\boxed{a^3 + 3a^2 . b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$$

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 . 2 + 3x . 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$

b) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = (2x)^3 + 3 . (2x)^2 . (-5) + 3 . 2x . (-5)^2 + (-5)^3 = (2x - 5)^3$

10 Completar los casilleros para que los cuatrinomios sean cubos perfectos.

a) $x^3 + \boxed{} + \boxed{} + 27$

b) $8x^3 + \boxed{} + \boxed{} + 64$

c) $x^3 + 75x + \boxed{} + \boxed{}$

d) $\boxed{} + 189x^2 + 441x + \boxed{}$

Diferencia de cuadrados

Teoría

El producto entre la suma y la diferencia de dos monomios es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

En conclusión: $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

a) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ **b)** $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$ **c)** $x^6 - 9 = (x^3 + 3)(x^3 - 3)$

11 Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^2 - 1 =$

b) $x^2 - 100 =$

c) $25 - x^2 =$

d) $9x^2 - 4 =$

e) $x^4 - 49 =$

f) $25x^4 - 81 =$

g) $121 - x^6 =$

h) $36x^8 - 1 =$

i) $x^{10} - 64 =$

12 Factorizar los siguientes polinomios combinando los procedimientos.

a) $2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x =$

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 =$

c) $54x^6 + 54x^5 + 18x^4 + 2x^3 =$

d) $20x^3 - 45x + 8x^2 - 18 =$

Teorema de Gauss

Teoría

La **raíz** de un polinomio es el valor de x que verifica que su valor numérico es 0 y puede tener a lo sumo tantas raíces reales como el valor de su grado.

Todo polinomio de grado **n**, con **n** raíces reales, puede ser factorizado como:

$$\boxed{P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - x - 6 \begin{cases} P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ es raíz del polinomio} \\ P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \text{ es raíz del polinomio} \end{cases}$$

$$P(x) = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Si un polinomio tiene su coeficiente principal igual a 1 y su término independiente es entero, sus raíces reales enteras son divisores del término independiente.
Para hallar las raíces reales enteras de un polinomio, se deben encontrar los divisores del término independiente y probar cuál de ellas verifica que su valor numérico es 0.

Por ejemplo: $P(x) = x^2 + 3x - 10$
Los divisores del término independiente son: $1, -1, 2, -2, 5, -5, 10$ y -10.
De esos 8 valores, solo 2 y -5 verifican que el valor numérico es 0:
$P(2) = 2^2 + 3 . 2 - 10 = 0$ y $P(-5) = (-5)^2 + 3 . (-5) - 10 = 0$
$P(x) = x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

También, se puede hallar una de las raíces y aplicar la Regla de Ruffini:

Por ejemplo: $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
Los divisores del término independiente son: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6.
$Q(1) = 1^3 + 4 . 1^2 + 1 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \underbrace{(x^2 + 5x + 6)}_{C(x)}(x - 1) \Rightarrow Q(x) = C(x) . (x - 1)$$

$$C(-2) = (-2)^2 + 5 . (-2) + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$C(x) = (x + 3)(x + 2)$$

$$Q(x) = C(x) . (x - 1) \Rightarrow Q(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 1)$$

Ejercitación

24 Unir cada trinomio con el o los valores que sean raíces de ellos.

a) $x^2 - x - 2$

b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

c) $-x^2 - x + 2$

d) $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

e) $x^2 + 2x - 3$

f) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

$x = 1$

$x = -2$

$x = -1$

$x = 3$

$x = 2$

$x = -3$

25 Factorizar los siguientes trinomios.

a) $x^2 + 2x - 15 =$

b) $x^2 - 6x + 8 =$

c) $x^2 - 3x - 18 =$

26 Factorizar los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

b) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 =$

e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 =$

c) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 =$

f) $x^5 - x^4 - 16x + 16 =$

Ejercicios de repaso

36 **Marcar con un X los polinomios correctamente factorizados.**

a) $3x^3 - 12x^2 + 6 = 3x(x^2 - 4x + 2)$ ☐

b) $x^2 + 0{,}25 + x = (x + 0{,}5)^2$ ☐

c) $25x^2 - 100 = (5x - 10)(5x + 10)$ ☐

d) $x^4 + 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$ ☐

e) $x^3 - 1 = (x - 1)^3$ ☐

f) $2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$ ☐

37 **Unir cada trinomio con su factorización.**

a) $x^2 + 5x - 14$

b) $x^2 - 14x + 49$

c) $x^2 - 5x - 14$

d) $x^2 + 9x + 14$

e) $x^2 + 14x + 49$

f) $x^2 - 9x + 14$

$(x + 7)(x + 7)$

$(x + 7)(x - 2)$

$(x - 7)(x + 2)$

$(x - 7)(x + 7)$

$(x - 7)(x - 7)$

$(x - 7)(x - 2)$

$(x + 7)(x + 2)$

38 **Factorizar aplicando el procedimiento que corresponda.**

a) $-1{,}25x^3 + 1{,}875x^4 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x^5 =$

b) $6x^4 + 15x^3 - 4x - 10 =$

c) $0{,}25x^2 - 0{,}\overset{\frown}{1} =$

d) $25x^2 - 30x + 9 =$

e) $x^2 + 3x - 18 =$

f) $x^3 - 512 =$

39 **Hallar las raíces y factorizar.**

a) $x^3 - 2x^2 - 29x + 30 =$

b) $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 =$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

d) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 =$

40 Factorizar los siguientes polinomios combinando los procedimientos.

a) $6x^5 + 12x^4 + 18x^3 + 36x^2 =$

b) $5x^6 - 30x^5 - 80x^4 =$

c) $36x^4 + 64x^2 - 96x^3 =$

d) $3x^7 + 36x^5 + 18x^6 + 24x^4 =$

e) $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32 =$

f) $x^6 - x + 3x^5 - 3 =$

g) $12x^6 + 8x^5 - 108x^4 - 72x^3 =$

h) $4x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 24x + 16 =$

41 Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{4x^4 + 20x^3}{2x^3 - 50x} =$

b) $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x - 6}{x^5 + 2x^2} =$

c) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 15} =$

d) $\dfrac{2x^2 + 18 - 12x}{x^2 + 6x - 27} =$

Actividad: Colocar una X a los polinomios correctamente factorizados

a)	$5x + 10x^2 = 5(x + 2x^2)$		d)	$x^7 - x^5 = x^4(x^3 - x)$	
b)	$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(2 + x^2)$		e)	$15x^3 - 20x^2 + 5x = 5x(1 + 3x^2 - 4x)$	
c)	$x^3 - x = x(1 - x^2)$		f)	$12x^2 - 4x^3 + 20x^4 = 2x^2(6 - 2x + 10x^2)$	

Ejercitación de cierre

1) Factorizar los siguientes trinomios
   a) $x^2 + 2x - 15 =$ b) $x^2 - 6x + 8 =$ c) $x^2 - 3x - 18 =$

2) Factorizar los siguientes polinomios

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$
b) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 =$
c) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 =$
d) $x^4 - 5x^2 + 4 =$
e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 =$
f) $x^5 - x^4 - 16x + 16 =$

3) Marcar con una X los polinomios correctamente factorizados

a)	$3x^3 - 12x^2 + 6 = 3x(x^2 - 4x + 2)$		d)	$x^4 + 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)$	
b)	$x^2 + 0{,}25 + x = (x + 0{,}5)^2$		e)	$x^3 - 1 = (x - 1)^3$	
c)	$25x^2 - 100 = (5x + 10)(5x - 10)$		f)	$2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$	

4) Unir cada trinomio con su factorización

a)	$x^2 + 5x - 4$	I.	$(x + 7)(x - 2)$
b)	$x^2 - 14x + 49$	II	$(x - 7)(x + 7)$
c)	$x^2 - 5x - 14$	III	$(x - 7)(x - 2)$
d)	$x^2 + 9x + 14$	IV.	$(x + 7)(x + 2)$
e)	$x^2 + 14x + 49$	V.	$(x + 7)(x + 7)$
f)	$x^2 - 9x + 14$	VI.	$(x - 7)(x + 2)$
		VII.	$(x - 7)(x - 7)$

5) Factorizar aplicando el procedimiento que corresponda
   a) $-1{,}25x^3 + 1{,}875x^4 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x^5 =$ b) $25x^2 - 30x + 9 =$

6) Hallar las raíces y factorizar
   a) $x^3 - 2x^2 - 29x + 30 =$
   b) $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 =$
   c) $x^4 - 5x^2 + 4 =$
   d) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 =$

7) Factorizar los siguientes polinomios combinando los procedimientos
   a) $6x^5 + 12x^4 + 18x^3 + 36x^2 =$
   b) $5x^6 - 30x^5 - 80x^4 =$
   c) $36x^4 + 64x^2 - 96x^3 =$
   d) $3x^7 + 36x^5 + 18x^6 + 24x^4 =$
   e) $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32 =$
   f) $x^6 + 3x^5 - x - 3 =$
   g) $12x^6 + 8x^5 - 108x^4 - 72x^3 =$
   h) $4x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 24x + 16 =$

Unidad III: Funciones

Antes de empezar el tema tendremos que ver cómo se ubican los puntos en el plano y aprender a interpretar gráficos. Por esto tenemos que ver algunos nuevos términos y cuestiones a tener en cuenta.

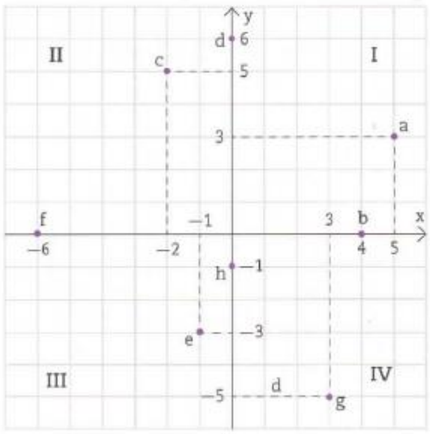
Ejes cartesianos

Teoría

Los ejes cartesianos son dos rectas perpendiculares que dividen el plano en cuatro cuadrantes. Cada punto del plano está determinado por un par ordenado (x , y). El punto donde se cortan los ejes se denomina origen de coordenadas y corresponde al punto (0 ; 0).

A la recta horizontal, se la denomina eje **x** o de las **abscisas**.
A la recta vertical, se la denomina eje **y** o de las **ordenadas**.
Los puntos que están sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante.

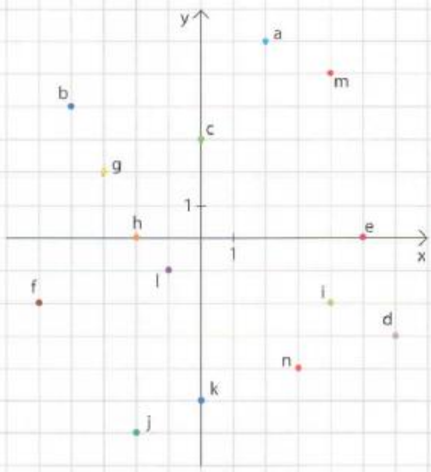
Punto	x	y				
a	5	3	→	(5 ; 3)	→	cuadrante I
b	4	0	→	(4 ; 0)	→	eje x
c	– 2	5	→	(– 2 ; 5)	→	cuadrante II
d	0	6	→	(0 ; 6)	→	eje y
e	– 1	– 3	→	(– 1 ; – 3)	→	cuadrante III
f	– 6	0	→	(– 6 ; 0)	→	eje x
g	3	– 5	→	(3 ; – 5)	→	cuadrante IV
h	0	– 1	→	(0 ; – 1)	→	eje y



1 Escribir las coordenadas de los puntos marcados en el plano.

a = (;)
b = (;)
c = (;)
d = (;)
e = (;)
f = (;)
g = (;)

h = (;)
i = (;)
j = (;)
k = (;)
l = (;)
m = (;)
n = (;)



2 Observar los puntos del ejercicio anterior y colocar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda.

a) La abscisa del punto **m** es negativa. ☐

b) La ordenada del punto **g** es positiva. ☐

c) El punto **b** tiene las componentes iguales. ☐

d) La abscisa del punto **i** es el doble de su ordenada. ☐

e) La ordenada del punto **j** es el triple de su abscisa. ☐

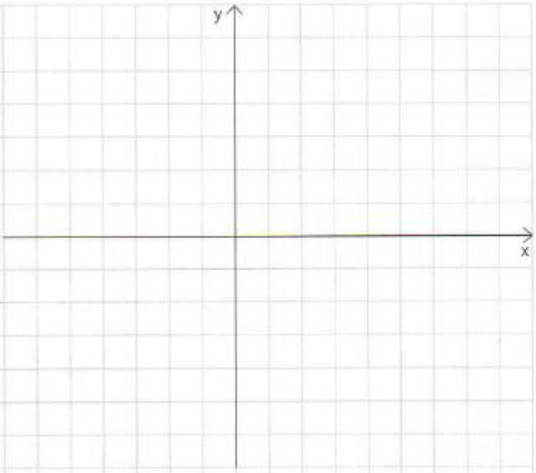
3 **Marcar en el plano los siguientes puntos.**
$a = (-2\,;-5)$, $b = (7\,;4)$, $c = (-3\,;2)$ y $d = (3\,;-4)$

Trazar las siguientes rectas.
M: une los puntos a y b.
R: une los puntos c y d.

Observar el gráfico y escribir.
a) El punto de la rectas M y R.

b) Tres puntos de la recta M distintos de a y b.

c) Tres puntos de la recta R distintos de c y d.



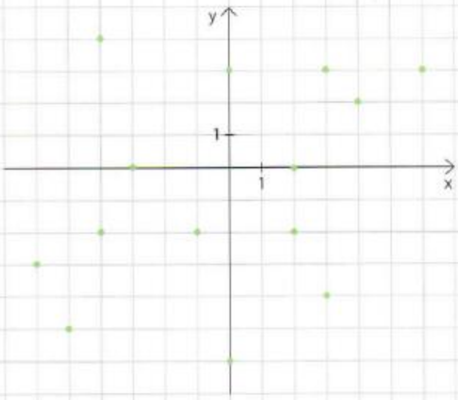
4 **Escribir las coordenadas de todos los puntos verdes que cumplen con cada condición.**
a) Sus coordenadas son iguales u opuestas.

b) La abscisa es el doble que la ordenada.

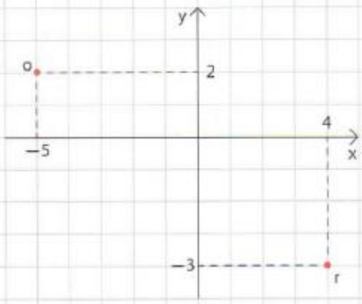
c) La ordenada es menor que la abscisa.

d) No pertenecen a ningún cuadrante.

e) La suma de sus coordenadas es negativa.



5 **Marcar en el gráfico los siguientes puntos.**
a) p: sobre el eje y con ordenada opuesta a la del punto **o**.
b) s: sobre el eje x con abscisa opuesta a la del punto **r**.
c) t: coordenadas iguales a la suma de las coordenadas de los puntos **o** y **r**.
d) m: coordenadas opuestas a las del punto **t**.
e) h: coordenadas iguales al triple de las coordenadas del punto **m**.



Desafío

6 **Indicar según las condiciones a qué cuadrante o eje pertenece el punto $(a\,;b)$.**

a) $a < 0 \wedge b = 0 \rightarrow$

b) $a < 0 \wedge b < 0 \rightarrow$

c) $a = 0 \wedge b > 0 \rightarrow$

d) $a > 0 \wedge b > 0 \rightarrow$

e) $a > 0 \wedge b < 0 \rightarrow$

f) $a < 0 \wedge b > 0 \rightarrow$

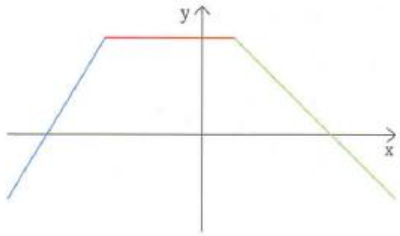
Interpretación de gráficas

Teoría

Una gráfica representa la relación que existe entre dos variables mediante puntos en un plano. Para realizar el análisis de una gráfica, se debe tener en cuenta qué ocurre con los valores de la ordenada a medida que varían los valores de la abscisa.

Al aumentar el valor de **x**, puede ocurrir que el valor de **y**

- aumente, entonces, la gráfica aumenta.
- disminuya, entonces, la gráfica disminuye.
- se mantenga igual, entonces, la gráfica es constante.



7 Observar la gráfica y colocar **A** (aumenta), **C** (constante) o **D** (disminuye).

a) $-3 < x < -2$ $\square$

b) $0 < x < 1$ $\square$

c) $4 < x < 5$ $\square$

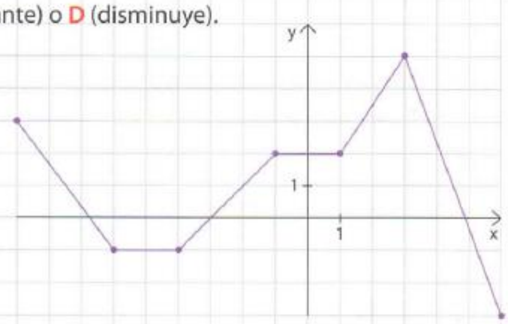
d) $-6 < x < -5$ $\square$

e) $1 < x < 2$ $\square$

f) $-8 < x < -7$ $\square$

g) $-2 < x < -1$ $\square$

h) $3 < x < 4$ $\square$



8 Observar la gráfica y completar los pares ordenados.

a) $(-6; \square)$

b) $(\square; 4)$

c) $(-3; \square)$

d) $(\square; -8)$

e) $(0; \square)$

f) $(\square; 0)$

Escribir todos los puntos que cumplan con cada condición.

g) Tengan ordenada igual a 3:

h) Tengan las componentes iguales:

Observar la gráfica y responder.

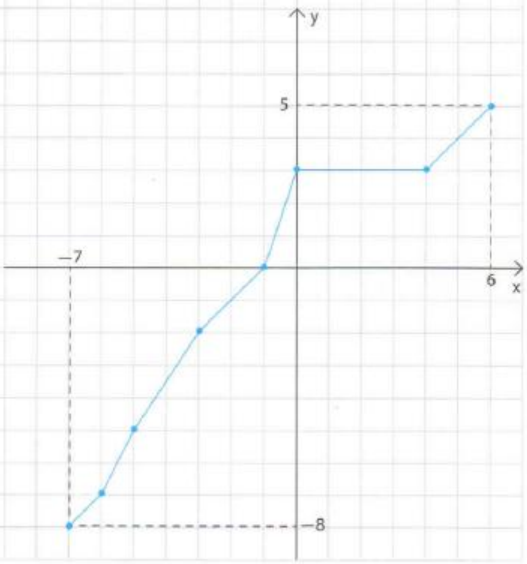
i) ¿Entre qué valores varía la abscisa?

j) ¿Entre cuáles la ordenada?

k) ¿Entre qué valores de x la gráfica es negativa?

l) ¿Entre cuáles es positiva?

m) ¿Y entre cuáles es constante?



Ahora es tu turno de interpretar los gráficos así que les dejamos varias actividades para pensar!!

9 La gráfica muestra las temperaturas **máximas** y **mínimas** de una ciudad durante los primeros 15 días de julio.

Observar el gráfico y responder.

a) ¿Entre qué valores se registraron las temperaturas máximas?

b) ¿Y entre cuáles las temperaturas mínimas?

c) ¿En qué días las temperaturas máximas fueron menores que 0°C?

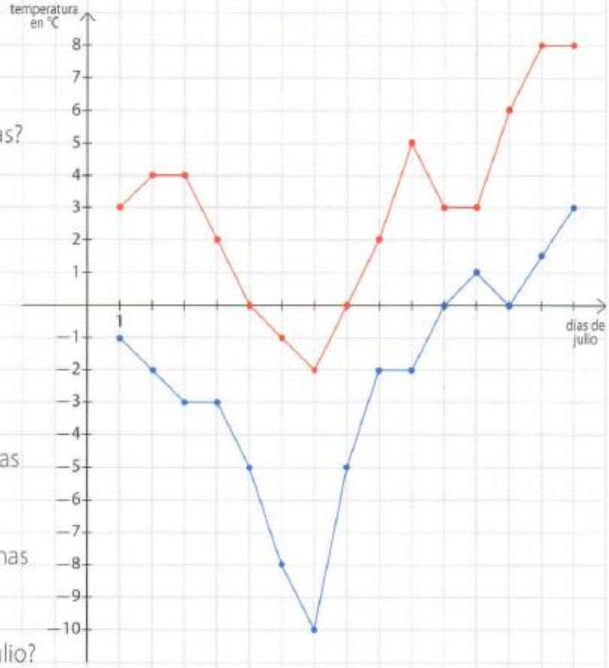
d) ¿En qué períodos las temperaturas máximas aumentaron?

e) ¿En cuáles diminuyeron?

f) ¿Entre qué días las temperaturas máximas tuvieron un menor aumento?

g) ¿En qué período las temperaturas mínimas fueron menores a − 5°C?

h) ¿Cuál fue la amplitud térmica del 7 de julio?



10 Completar con los valores que correspondan.

a) $-5 < x < -3 \rightarrow \square < y < \square$

b) $0 < x < 2 \rightarrow \square < y < \square$

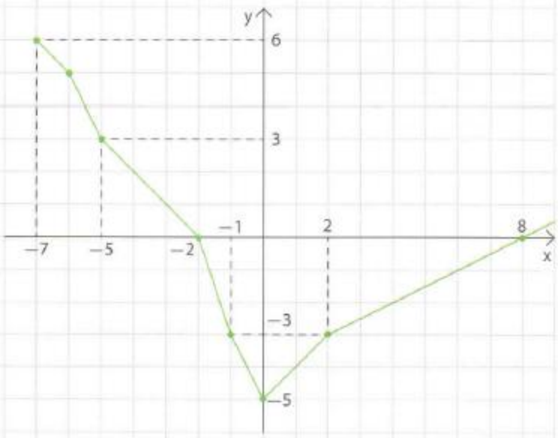
c) $\square < x < \square \rightarrow 0 < y < 3$

d) $\square < x < \square \rightarrow 3 < y < 6$

e) $-2 < x < -1 \rightarrow \square < y < \square$

f) $\square < x < 8 \rightarrow -5 < y < \square$

g) $-6 < x < \square \rightarrow 2 < y < \square$



Desafío

11 En las gráficas, se relacionan diferentes variables.

Describir una situación para cada una de las gráficas.

a) b) c)

Concepto de Función

Teoría

Una relación entre dos conjuntos numéricos A y B es un conjunto de pares ordenados (x; y), con la condición de que $x \in A \wedge y \in B$.

Ejemplo: $R: A \rightarrow B \wedge A = \{0; 1; 2\} \wedge B = \{3; 4; 5; 6\}$

a) $R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ b) $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ c) $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Una relación es una función cuando se cumplen dos condiciones:

1) Todos los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B (existencia).
2) Cada elemento del conjunto A se relaciona con un único elemento del conjunto B (unicidad).

Del ejemplo anterior:
En R_1, el 0 se relaciona con 2 elementos del conjunto B, el 3 y el 4 (no cumplen con la condición de unicidad).
En R_2, el 0 no está relacionado con ningún elemento del conjunto B (no cumple con la condición de existencia).
En R_3, todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, es función.

$f: A \rightarrow B \wedge f = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \rightarrow 5 \text{ es la "imagen" de 0 y 0 es la "preimagen" de 5} \\ f(1) = 6 \rightarrow 6 \text{ es la "imagen" de 1 y 1 es la "preimagen" de 6} \\ f(2) = 3 \rightarrow 3 \text{ es la "imagen" de 2 y 2 es la "preimagen" de 3} \end{cases}$$

1 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = \{2;4;7;8\} \wedge B = \{1;3;5;7;9\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
2	1
4	1
7	1
8	1

b)

x	y
7	1
7	3
7	5
7	9

c)

x	y
2	3
8	1
4	5

d)

x	y
8	1
7	5
4	9
2	3

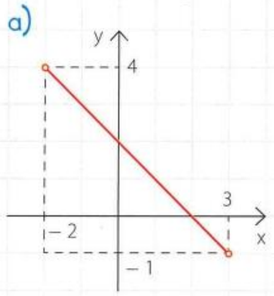
e)

x	y
8	5
4	3
7	1
2	9
8	7

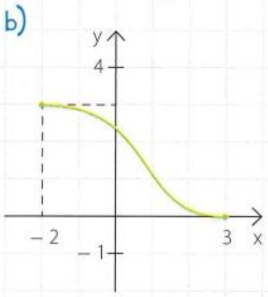
2 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = [-2;3] \wedge B = [-1;4]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.

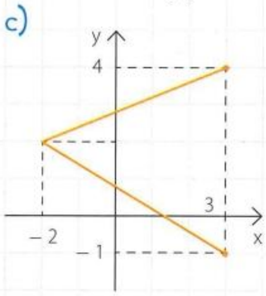
a)



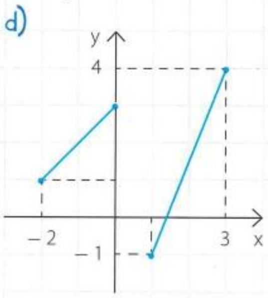
b)



c)



d)

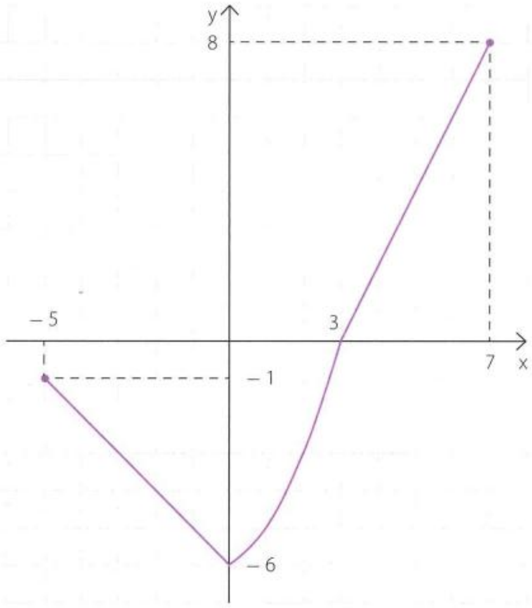


3 **Observar el gráfico de la función y responder.**

a) ¿Cuál es la imagen de 3?
b) ¿Y cuál la de – 3?
c) ¿Cuál es la preimagen de 2?
d) ¿Y cuál la de 4?
e) ¿En qué valor de x la función vale 0?
f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?
g) Escribir dos valores de x con la misma imagen.

Completar según corresponda.

h) $f(2) = \square$
j) $f(-4) = \square$
i) $f(\square) = 6$
k) $f(\square) = 8$



Dominio e imagen de una función

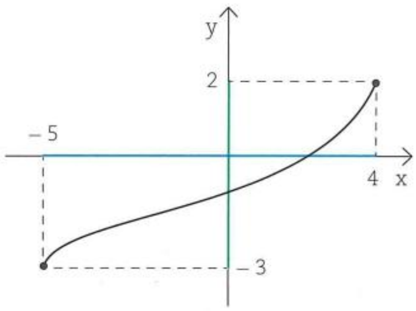
Teoría

En una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su **dominio** es un conjunto de números reales que pueden ser valores de **x**; y su **imagen**, los que pueden ser valores de **y**.

a) En la función f, el dominio son los valores marcados en azul; y la imagen, los marcados en verde.

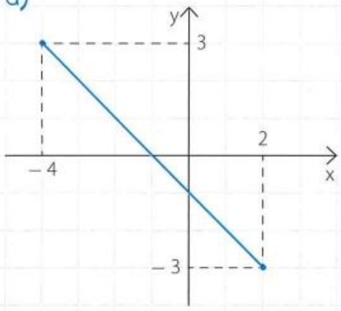
$$f: \underbrace{[-5\,;4]}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{[-3\,;2]}_{\text{Imagen}}$$

b) En la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, el dominio son los reales positivos; y el cero, al igual que su imagen: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

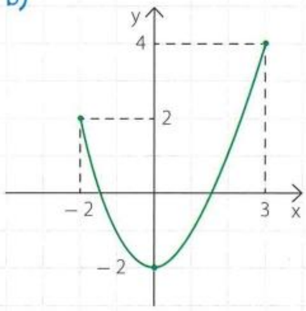


4 **Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.**

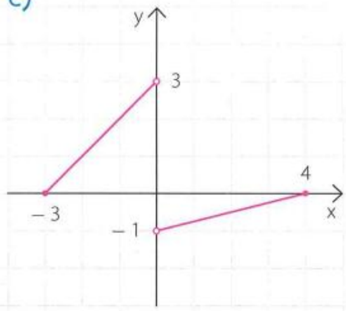
a)



b)



c)



5 **Hallar el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x - 1$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
d) $f(x) = \sqrt{x-3}$
f) $f(x) = \sqrt{1-x}$

Desafío

6 **Decidir si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar.**

a) $R_1: N_0 \to N_0 \wedge R_1(x) = x - 1$
b) $R_2: N \to Q \wedge R_2(x) = \sqrt{x}$
c) $R_3: N_0 \to Q \wedge R_3(x) = \dfrac{x}{x+5}$

Conjuntos de ceros o raíces, positividad y negatividad

Teoría

- El **conjunto de ceros** o **raíces** de una función son los valores de x que determinan que $f(x) = 0$.

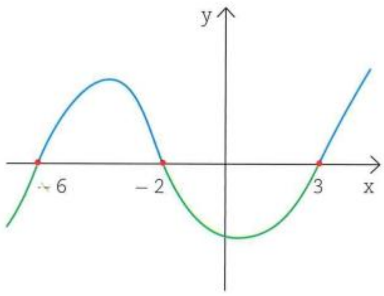
  $f(-6) = 0 \wedge f(-2) = 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow \mathbf{C^0} = \{-6 ; -2 ; 3\}$

- El o los **conjuntos de positividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea positiva, o sea, que $f(x) > 0$, (gráfica en azul).

  $\mathbf{C^+} = (-6 ; -2) \cup (3 ; +\infty)$

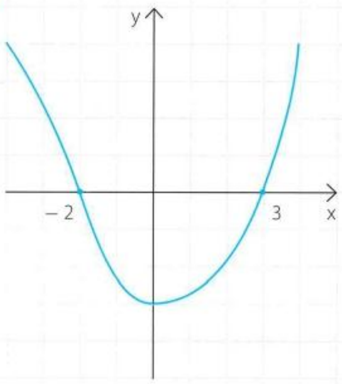
- El o los **conjuntos de negatividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea negativa, o sea, que $f(x) < 0$, (gráfica en verde).

  $\mathbf{C^-} = (-\infty ; -6) \cup (-2 ; 3)$



7 Escribir los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones.

a)

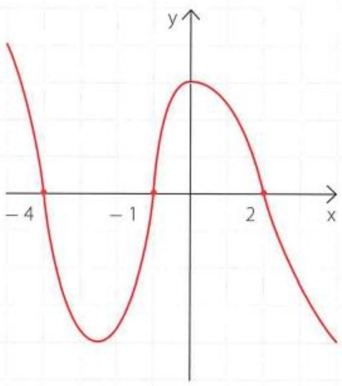


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

b)

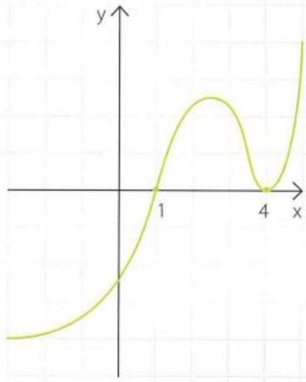


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

c)



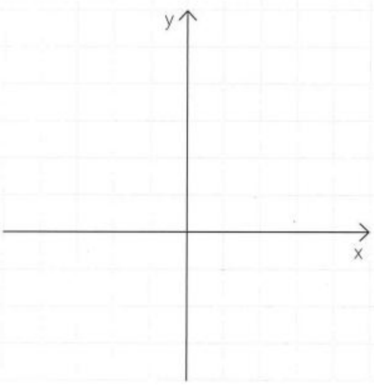
$C^0 =$

$C^+ =$

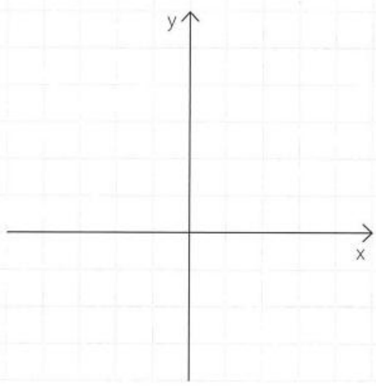
$C^- =$

8 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

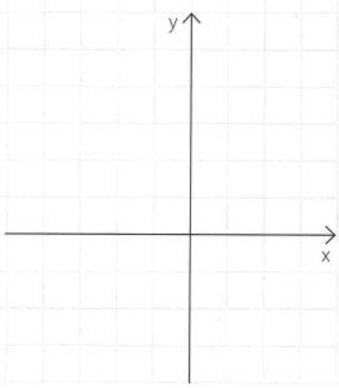
a) $f(1) = 0 \wedge f(-3) = 0 \wedge f(0) > 0$



b) $C^0 = \{-2 ; 0 ; 3\} \wedge f(-5) < 0 \wedge f(1) < 0$



c) $f(-4) = 0 \wedge f(0) = 0 \wedge C^- = \varnothing$



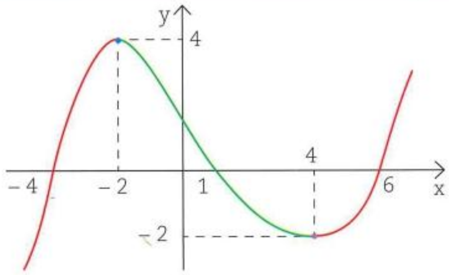
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teoría

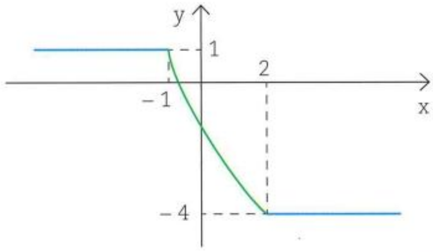
Si a medida que los valores de x aumentan, el valor de la función aumenta, entonces, la función **crece**; pero si disminuyen, entonces, la función **decrece**.
En $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$, la función no crece ni decrece. Los puntos $(-2 ; 4)$ y $(4 ; -2)$ se denominan **máximo** y **mínimo relativo**, respectivamente.

Crecimiento: $(-\infty ; -2) \cup (4 ; +\infty)$.

Decrecimiento: $(-2 ; 4)$.



Cuando al aumentar los valores de x, los valores de la función no varían, la función no crece ni decrece, sino que se mantiene **constante**.
$f(-3) = f(-2) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(3) = f(4) = -4$
La función es constante en: $(-\infty ; -1) \cup (2 ; +\infty)$.

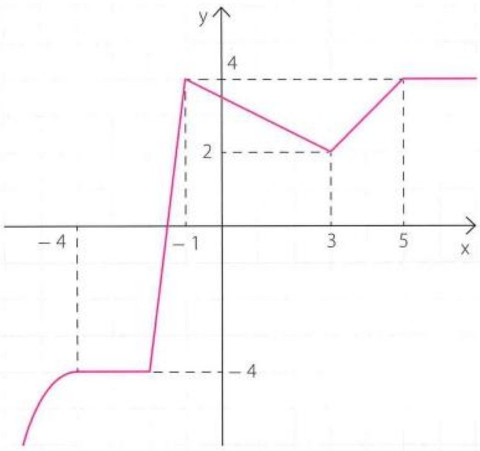


9 **Observar el gráfico y escribir.**

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

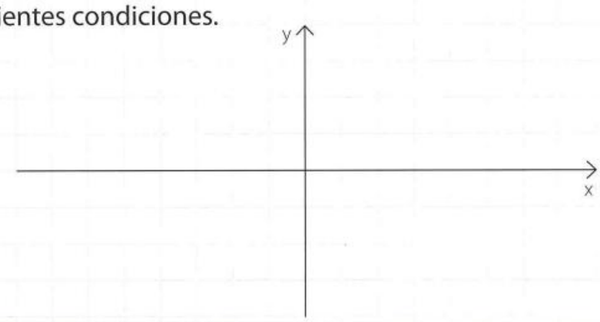
b) El o los intervalos donde es constante.

c) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



10 **Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones.**

- Crecimiento: $(-\infty ; -5) \cup (2 ; +\infty)$
- Es constante: $(-5 ; -2)$
- $f(-7) = f(0) = f(5) = 0$
- Mínimo relativo en $(2 ; -2)$



Desafío

11 **Indicar cuáles de las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.**

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 1 - x$

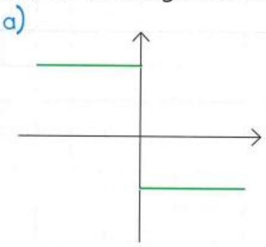
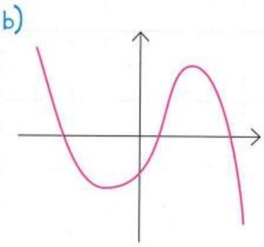
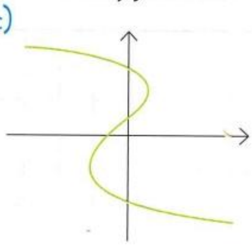
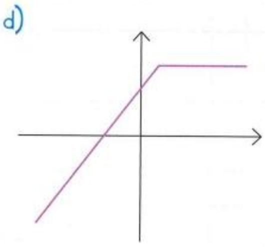
d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = x^3$

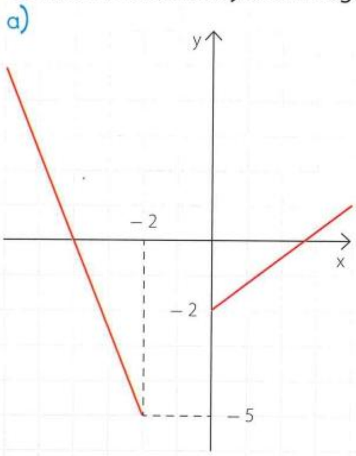
f) $f(x) = -7$

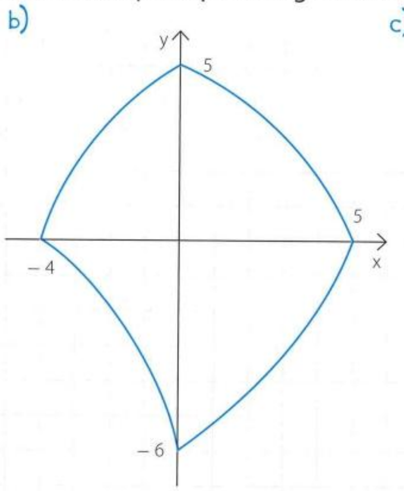
Repaso

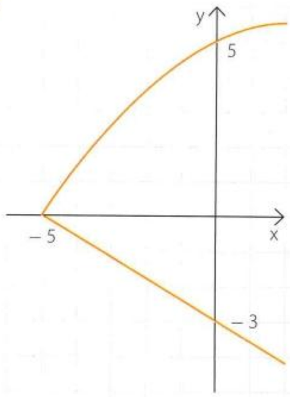
12 **Indicar si las siguientes relaciones de R: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones y justificar.**

a) 
b) 
c) 
d) 

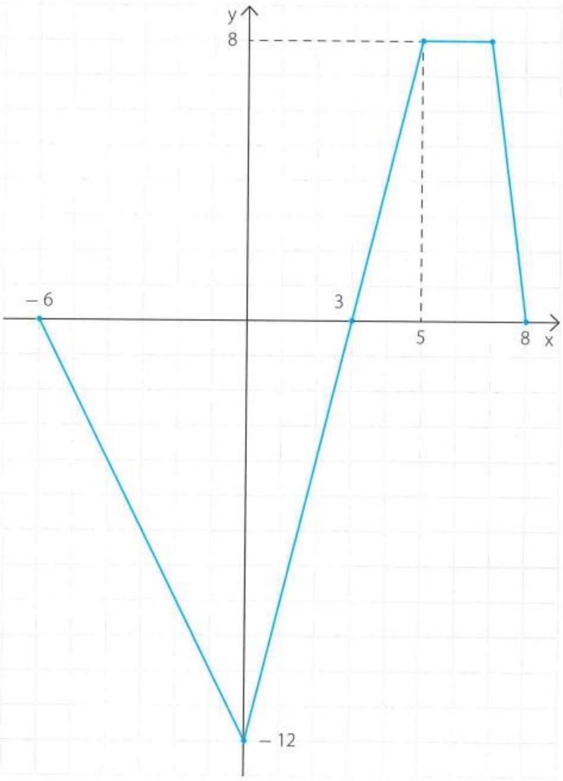
13 **Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.**

a) 

b) 

c) 

14 **Observar el gráfico de la función y responder.**



a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?

b) ¿Cuáles son las raíces?

c) ¿Cuál es la imagen de – 2?

d) ¿Y cuál la de 0?

e) ¿Cuáles son las preimágenes de – 4?

f) ¿En qué intervalo la función vale 8?

Colocar >, < o = según corresponda.

g) f(2) ☐ f(4)

h) f(6) ☐ f(7)

i) f(– 1) ☐ f(– 2)

j) f(1) ☐ f(5)

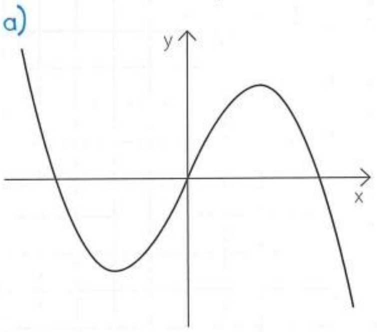
k) f(8) ☐ f(– 6)

l) f(– 3) ☐ f(1)

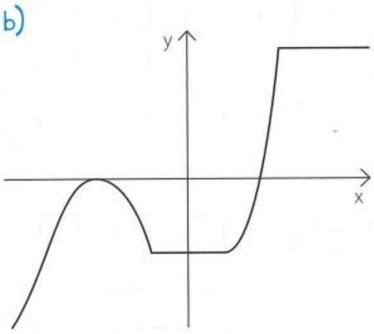
15 Marcar sobre el eje x.

- Con **rojo**: los intervalos de positividad.
- Con **verde**: los intervalos de negatividad.
- Con **azul**: el conjunto de ceros o raíces.

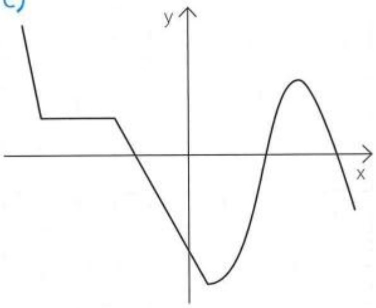
a)



b)



c)

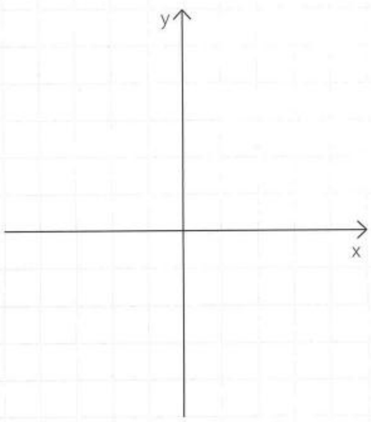


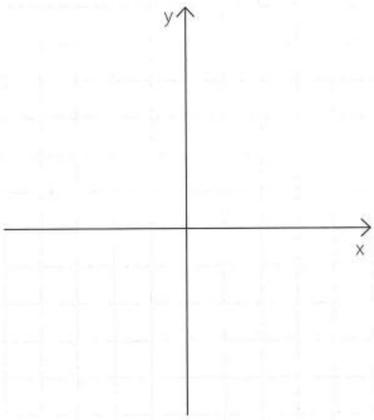
16 **Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.**

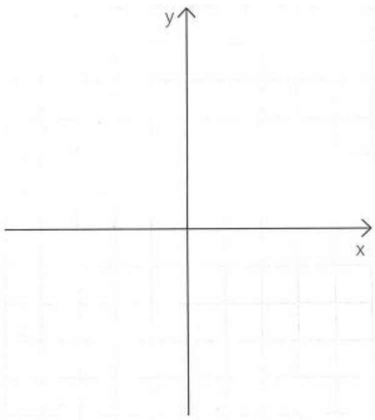
a) Es constante en $(-\infty\,;-1)$; decreciente en $(-1\,;3)$ y tiene un mínimo relativo en $(3\,;-4)$.

b) Es constante en $(-2\,;0)$ y es creciente en $(-\infty\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$.

c) Tiene máximos relativos en $(-4\,;1)$ y $(3\,;0)$ y $f(0)=-3$.







17 **Observar el gráfico y escribir.**

a) Los conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) El o los intervalos donde es constante.

d) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.